ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III (1. VE 2. GRUP)

ARASINAV SORULARI

1) Hangi n değerleri için $\int_0^1 x^n \ln x dx$ integrali yakınsaktır? Yakınsak olan integralin değerini bulunuz.

2) Aşağıdaki seriler x in hangi değerleri için yakınsaktır? Toplamın değerini bulunuz.

a. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{8}{x^5}+\frac{16}{x^6}+\dots$

b. $e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-4x}+e^{-5x}+\dots$

3) Eğer $\sum_k a_k$ yakınsak ve $\sum_k b_k$ ıraksak ise o zaman $\sum_k (a_k+b_k)$ ıraksak ve $\sum_k (a_k-b_k)$ ıraksaktır, gösteriniz.

4) Aşağıdaki serilerin karakterini bulunuz.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\left[\ln(k+1)\right]^2}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$

5) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+2}{k(k+3)}$ serisi koşullu yakınsak mıdır? Mutlak yakınsak mıdır? Neden, açıklayınız.

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)(x-3)^k}{k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını(kümesini) bulunuz.

7) $f_n(x)=n^{\frac{3}{2}} x e^{-nx}$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaklığını ve terim terim integrallenebilirliğini inceleyiniz.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\pi n}$ fonksiyon serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde terim terim türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Not: Sınav **03.12.2020** Perşembe günü **09:00-11:00** arasında gerçekleşecektir. Süre 120 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

ANALİZ III ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

① $n=-1$ ise; $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim\limits_{a\to 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_a^1 = -\infty$

olup, integral $n=-1$ için ıraksaktır.

$$\int_0^1 x^n \ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\ln a + \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} \right]$$

$n<-1 \Rightarrow n+1<0$, $\lim\limits_{a\to 0^+} a^{n+1}\cdot \ln a = -\infty$ ve $\lim\limits_{a\to 0^+} a^{n+1} = +\infty$

olup, integral ıraksak olur.

$n>1 \Rightarrow \lim\limits_{a\to 0^+} a^{n+1}\cdot \ln a = \lim\limits_{a\to 0^+} \frac{\ln a}{a^{-(n+1)}} = \lim\limits_{a\to 0^+} -\frac{a^{n+1}}{n+1} = 0$ ve

$\lim\limits_{a\to 0^+} a^{n+1} = 0$ olup, $n>-1$ için integral yakınsak

ve $n>-1$ için $\int_0^1 x^n \ln x\,dx = \frac{-1}{(n+1)^2}$ dır.

— o —

② a) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{8}{x^5}+\frac{16}{x^6}+\dots = \frac{1}{x^2}\left[1+\frac{2}{x}+\left(\frac{2}{x}\right)^2+\left(\frac{2}{x}\right)^3+\dots\right]$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{x^2-2x},$$

$\left|\frac{2}{x}\right|<1 \Leftrightarrow |x|>2$ için, seri toplamı $= \frac{1}{x^2-2x}$ dır.

b) $e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-4x}+\dots = e^{-x}\left(1+(e^{-x})^2+(e^{-x})^3+\dots\right)$

$= e^{-x}\cdot\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}$ dır,

$|e^{-x}|<1 \Leftrightarrow e^{-x}<1 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow \boxed{x>0}$ için.

③ Aksini kabul edelim. $\sum(a_k+b_k)$ yakınsak olsun.
O zaman yakınsak iki serinin toplamı, farkı yakınsak olduğundan

$$\sum[(a_k+b_k)-a_k]=\sum b_k$$ serisi de yakınsak olur.

Bu ise $\sum b_k$ nın ıraksak oluşu ile çelişir. O halde kabul yanlıştır, yani $\sum(a_k+b_k)$ ıraksaktır.

Benzer şekilde, $\sum(a_k-b_k)$ serisi yakınsak olsaydı

$$\sum[a_k-(a_k-b_k)]=\sum b_k$$ serisi de yakınsak olurdu.

Bu ise hipotezle çelişir.

④ a) $$\int_1^\infty \frac{[\ln(x+1)]^{-2}}{x+1}\,dx=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\right]_1^R=\frac{1}{\ln 2}$$

olup, integral testine göre verilen seri yakınsaktır.

b) $\lim\limits_{k\to\infty} k^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{k}\right)=1\neq 0$ olduğundan genel terim testine göre verilen seri ıraksaktır.

⑤ Seri Alterne seri olup, Leibnitz testine göre yakınsaktır.
Fakat mutlak değeri alınarak elde edilen $\sum\frac{k+2}{k(k+3)}$ serisi ıraksaktır. Çünkü $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+2}{k(k+3)}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k+3}{k+2}=1\neq 0$ old.

Bölüm Testine göre; $\sum\frac{1}{k}$ ıraksak old., $\sum\frac{k+2}{k(k+3)}$ ıraksaktır.

O halde verilen seri koşullu yakınsaktır.

⑥ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k\ln(k+1)}{(k+1)\ln k}|x-3|=|x-3|$

$|x-3|<1$ ise seri yakınsak, $|x-3|>1$ ise seri ıraksaktır.

$r=1$ dir. $|x-3|<1 \Leftrightarrow -1<x-3<1 \Leftrightarrow 2<x<4$,

$x=2$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln k}{k}$ yakınsak (Leibnitz kriteri),

$x=4$ için $\sum\frac{\ln k}{k}$ ıraksak olup,

yakınsaklık Aralığı (Kümesi) $=[2,4)$ dır.

7-) $f_n(x) = n^{3/2} x e^{-nx}$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaklığını ve terim terim integrallenebilirliğini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2} x e^{-nx} = 0 = f(x)$

$f_n \to f=0$ Noktasal yakınsak

$$c_n = \sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1] \}$$
$$= \sup\{ | n^{3/2} x e^{-nx} - 0 | : x \in [0,1] \}$$
$$= \sup\{ \underbrace{n^{3/2} x e^{-nx}}_{= g(x)} : x \in [0,1] \}$$

$$g'(x) = n^{3/2} \left(1 . e^{-nx} + x . e^{-nx} . (-n) \right)$$
$$= n^{3/2} e^{-nx} (1 - nx)$$

$g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ Kritik Nokta

	0		1/n		1
$g'(x)$		+	0	−	

max. nokta

$$c_n = g\left(\tfrac{1}{n}\right) = n^{3/2} . \frac{1}{n} . e^{-n.\frac{1}{n}}$$
$$= n^{1/2} e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} n^{1/2} . \frac{1}{e} = \infty \neq 0$$

$f_n \to f=0$ Düzgün yakınsak değil.

Şimdi terim terim integrallenebilirliğini inceleyelim.

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ midir?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^{3/2} x e^{-nx}\,dx = \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \int_0^1 x e^{-nx}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = u & e^{-nx}dx = dv \\ dx = du & \frac{e^{-nx}}{-n} = v \end{array}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \left[- \frac{x e^{-nx}}{n} \Big|_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx}\,dx \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{3/2} \left[- \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{e^{-nx}}{-n} \right) \Big|_0^1 \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} - \frac{n^{1/2}}{e^n} - \frac{1}{n^{1/2} e^n} + \frac{1}{n^{1/2}} = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

iki sonuç eşit çıktığından verilen fonksiyon dizisi terim terime integrallenebilirdir.

8-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \arctan \frac{x}{\pi n}$ fonksiyon serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\pi n}$ olsun. f_n fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilir olduğu açıktır. Ayrıca $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\pi n} \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi p-testi gereği yakınsak olduğundan Weierstrass M-testinden $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır.

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{(\pi n)^2}} \cdot \frac{1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n^3} \cdot \frac{1}{\frac{(\pi n)^2 + x^2}{(\pi n)^2}} = \frac{\pi}{\pi^2 n^3 + x^2 n}$$

Türev fonksiyonlarından oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\pi^2 n^3 + x^2 n}$ serisini ele alalım. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\left| \frac{\pi}{\pi^2 n^3 + x^2 n} \right| = \frac{\pi}{\pi^2 n^3 + \cancel{x^2 n}} \leq \frac{\pi}{\pi^2 n^3} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^3}$$

ve $\sum \frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisi düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak verilen seri $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilirdir.